SUBJECT: ٤/٥ / /

داخلية مجموعة:

لتكن A مجموعة جزئية من فضاء (X,d) وإن مجموعة النقاط الداخلية للمجموعة (A) تسمى داخلية (A) ويرمز لها بالرمز A°.

واضح من التعريف أن A دائماً وأبداً تحوي داخلية $A^\circ \subseteq A$ وإذا كان $A \subseteq B$ فإن $A^\circ \subseteq B^\circ$.

مبرهنة: أهم خواص الداخلية: لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء الجزئي (X,d) إن المفاهيم والقضايا التالية متحققة دوماً:

١. داخلية A أي A° تساوي اجتماع جميع المجموعات المفتوحة المحتواة في A.

٢. A° هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A.

٣. تكون المجموعة A مفتوحة إذا وفقط إذا كانت تساوي داخليتها.

البرهان:

-١- لنرمز بـ U لاجتماع جميع المجموعات المفتوحة المحتواة في A ولنثبت أن $U = A^\circ$

لتكن $x \in U$ نأخذ نقطة كيفية من U إن U ستنتمي إلى إحدى المجموعات المفتوحة المحتواة في A.

ينتج عن ذلك أن x نقطة داخلية طالما هي تنتمي لإحدى المجموعات المفتوحة.

$x \in U \Rightarrow x \in A^\circ$ ومنه $U \subseteq A^\circ$

لنفرض أن $x \in A^\circ$ حسب التعريف توجد كرة مفتوحة مركزها x ونصف قطرها r موجودة في A.

إن هذه الكرة المفتوحة هي مجموعة مفتوحة ومحتواة في A وهذا يعني x تنتمي إلى اجتماع المجموعات المفتوحة التي تنتمي إلى A $\Leftarrow$ $A^\circ \subseteq U$

من علاقتي الاحتواء تنتج المساواة.

-٢- من ① ينتج أن A° دائماً وأبداً هي مجموعة مفتوحة، لأنها هي اجتماع لمجموعات مفتوحة وهي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A لأنها اجتماع لجميع

Scanned by CamScanner

٣- إذا كان $A = A^\circ$ فإنها تكون مفتوحة لأن A° مفتوحة.

A مفتوحة ، $A \subseteq A$ مجموعة مفتوحة محتواة في A وبالتالي فهي تنتمي لـ $A^\circ \Leftarrow$

و علاقة الاحتواء الأخرى دائماً صحيحة $A \subseteq A^\circ$

من علاقتي الاحتواء نستنتج $A^\circ \subseteq A$

مبرهنة: لتكن A, B مجموعتين من الفضاء المتري (X, d) إن القضايا التالية محققة دوماً.

-1- $X^\circ = X$ لأن X مفتوحة و X الفضاء الكلي.

$\varphi^\circ = \varphi$ لأن φ مفتوحة و φ المجموعة الخالية.

-2- $(A^\circ)^\circ = A^\circ$

إن داخلية A° مجموعة مفتوحة فهي تساوي داخلية A.

-3- $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

البرهان:

لدينا $A^\circ \subseteq A$ و $B^\circ \subseteq B \Leftarrow A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ \Leftarrow$

[1] $(A^\circ \cap B^\circ)^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ فهي تساوي علاقة الاحتواء لأنهما مفتوحتان وتقاطعهما مفتوح فهي تساوي داخليتها

داخلية $A \cap B$ يساوي داخلية $A^\circ \cap B^\circ$

من جهة ثانية لدينا.

$A \cap B \subseteq A$ وكذلك $A \cap B \subseteq B \Leftarrow$ داخليتها محتواة فيها $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ$

ومنه $\Leftarrow$ [2] $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$

من [1] و [2] نستنتج المساواة

ملاحظة: في الحالة العامة داخلية الاجتماع $\neq$ اجتماع الداخلية.

مثال: لو أخذنا في $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد ~~الحقيقية~~ النسبية $\mathbb{Q}$ وقيمتها $S = \mathbb{R} / \mathbb{Q}$ في الفضاء

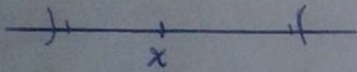
$S^\circ = \varphi$ لا تحوي أي مجال ، إذا أخذنا $\varphi^\circ \cup S^\circ = \varphi \Leftarrow (\varphi \cup S)^\circ = \mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$

★ جوار نقطة :

تعريف: ليكن (X,d) فضاء متري و x من هذا الفضاء و $V \subseteq X$ نسمي المجموعة V جوار النقطة x إذا وجدت الكرة مفتوحة مركزها x ونصف قطرها r بحيث تكون محتواة في V.

من التعريف واضح أن: نقطة تنتمي لأي جوار من جوارها.

مثال: لو أخذنا المجال $x \in \mathbb{R}$ ، $]x-1, x+1[$



لو أخذنا المجال المغلق هو جوار لـ x لأنه يحوي كرة مفتوحة مركزها x

2. الجوار ليس بالضرورة أن يكون مجموعة مفتوحة (المهم أن تحوي الكرة مفتوحة مركزها هذه النقطة والنقطة تنتمي لجميع نقاط الجوار).

بالإضافة إلى ذلك: إذا كان V جوار لـ x و G تحوي V فإن G يكون أيضا جوار.

- تقاطع عدد منته من جوارات النقطة هو جوار لهذه النقطة نبرهن على غرار ما فعلناه بتقاطع عدد منته من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة.

نتيجة: تكون مجموعة مفتوحة إذا وإذا فقط إذا كانت جوار لكل نقطة من نقاطها.

في الحالة الطبولوجية العامة نقول عن V أنها جوار لـ x إذا وجدت مجموعة مفتوحة مثل U بحيث $x \in U$ و $U \subseteq V$.

Scanned by CamScanner